# «Геодезические краевые задачи»

**Контрольные вопросы для промежуточной аттестации**

1. Какая функция называется гармонической?
2. Напишите уравнение Лапласа.
3. В чем состоит краевая задача?
4. В чем состоит внутренняя и внешняя задачи Дирихле?
5. В чем состоит внутренняя и внешняя задача Неймана?
6. В чем состоит третья краевая задача?
7. Какие виды потенциалов притяжения Вы знаете?
8. Как связана гармоническая функция с потенциалами притяжения?
9. Дайте определение шаровой функции
10. Как связаны шаровая и сферическая функции?
11. Напишите общее выражение сферической функции
12. Напишите общее выражение разложения функции в ряд сферических
13. Поясните решение любой из задач №№ 1-5, 7-12, 14-19, 21-22, 24-40
14. Что такое дисперсия? Ковариация?
15. Вычислить производные потенциала материальной точки по прямоугольным координатам
16. Найти проекции силы притяжения точечной массы на оси координат. Сравнить с результатом, полученным в задаче №1
17. Вычислить лапласиан функции $1/r$, $r$ –расстояние между точками с координатами *a,b,c*и*x,y,z*
18. Разложить функцию $1/r$по степеням отношения $R/\rho$. Использовать для $r$выражение$r^2 = R^2+\rho^2-2R\rho\cos\psi$, $R$,$\rho$ – радиус-векторы точек, $\psi$ угол между ними.
19. Доказать равенство -=$V$, $V$-потенциал объемных масс
20. Какая функция называется гармонической?
21. Найти функцию, гармоническую во всем пространстве кроме начала координат, если она зависит только от расстояния до начала координат
22. Вычислить $\Delta\left(\dfrac{\partial^4\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x\partial y^2\partial z}\right)$
23. Даны значения, которые гармоническая функция принимает на поверхности сферы. Определить ее значение в центре сферы
24. Доказать, что гармоническая функция может принимать экстремальные значения только на границе области существования и не имеет экстремальных значений внутри области существования
25. Доказать, что функция гармоническая во всем пространстве тождественно равна нулю
26. Функция $U$, гармоническая в области $\tau$, принимает на поверхности сферы, целиком лежащей в этой области, значения $u=c+\cos^2\psi$, $\psi$- сферическое расстояние от фиксированной точки сферы. Определить значение этой функции в центре сферы
27. Найти решение уравнения Лежандра при $n$=1
28. Вычислить полиномы Лежандра по формуле Родриго для $n$=2,3
29. Вычислить полином Лежандра при $n$=4 по рекуррентной формуле
30. Доказать ортогональность полиномов Лежандра
31. Построить графики полиномов Лежандра для $n$=0,1,2,3,4
32. Написать выражения присоединенных функций Лежандра для всех $\kappa$ при $n$=1,2,3,4
33. Построить $P_2^{\kappa}(x)$ для всех значений $\kappa$
34. Дайте определение шаровой функции
35. Написать однородные многочлены первой и второй степени от *x,y,z*. Найти условие, при котором эти многочлены будут шаровыми функциями
36. Доказать, что шаровая функция степени $n$ имеет $2n$+1 произвольный коэффициент

*37.* Какая связь между шаровой и сферической функциями?
*38.* Написать шаровую функциювторой степени в сферических координатах
*39.* Написать общее выражение сферической функции степени $n$. Сколько произвольных множителей она содержит?
*40.* Получить замкнутое выражение для сферической функции
*41.* Какими формулами выражается свойство ортогональности сферических функций?
*42.* Доказать, что разложение функции в ряд сферических содержит $(n+1)^2$ коэффициент
*43.* Составить систему линейных уравнений для определения коэффициентов разложения нулевой и первой степени функции $f(\vartheta,\lambda)$по ее значениям в четырех точках с координатами $\vartheta_1=0,\lambda_1=0;\vartheta_2=\pi/2,\lambda_2=0;\ \vartheta_3=\pi/2,\lambda_3=\pi/2;\vartheta_4=\pi/2,\ \lambda_4=\pi$
*44.* Радиус-вектор $\rho$ эллипсоида $\frac{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}{a^2}+\frac{(z-z_o)^2}{b^2}=1$ представить суммой сферических функций, пренебрегая величинами $(x_o/a)^2$; $(y_o/a)^2$; $(z_o/a)^2$; $\alpha^2$. ($\rho^2=x^2+y^2+z^2$, $x_o,y_o,z_o$–координаты центра эллипсоида, $\alpha$- сжатие эллипсоида)
*45.* В чем состоят внутренняя и внешняя задачи Дирихле и Неймана?
*46.* Используя первую формулу Грина, доказать единственность решения задачи Дирихле
*47.* Центр сферы радиуса$a$ находится в начале координат. Функция

$u=C\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{a}\right]$является гармонической вне сферы, а на сфере принимает значения $\bar{u}=0$ при любом постоянном $C$. Можно ли данную функцию $u$ рассматривать как решение внешней задачи Дирихле при краевом условии $\bar{u}=0$?
*48.* Используя первую формулу Грина, доказать единственность задачи Неймана
*49.* Имеют ли внутренняя и внешняя задачи Неймана однозначные решения?
*50.* Можно ли произвольно задать краевые условия при решении внутренней и внешней задачи Неймана?
*51.* Решить внешнюю задачу Дирихле для сферы, используя разложения по шаровым и сферическим функциям
*52.* Решить внутреннюю и внешнюю задачи Неймана для сферы, используя разложения по шаровым и сферическим функциям. Решение представить в виде ряда шаровых функций и в виде интегральной формулы
*53.* Решить внутреннюю задачу Неймана для сферы с краевым условием $\bar{u}=2\sin\vartheta\cos\lambda$и вычислить значение функции $u$ в точке с координатами $\rho=R/2$, $\vartheta=\pi/2$, $\lambda=0$.
*54.* Решить третью краевую задачу для сферы с краевым условием $(-\partial u/\partial\rho-u/2\rho)_{\rho=R}=f_3(\vartheta,\lambda)$. Решение представить в виде ряда шаровых функций и в виде интегральной формулы
*55.* Построить график функции Стокса
*56.* Построить график функции, решающей задачу Неймана